УДК 517.5

О РАДИУСЕ ГАХОВА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Л.А. Аксентьев, А.Н. Ахметова

Аннотация

В работе введено понятие радиуса единственности (радиуса Гахова) как радиуса наибольшего круга $rE,\ 0 < r \le 1,\ E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, внутри которого внешняя обратная краевая задача имеет единственное решение. Исследованы известные классы функций (в частности, класс функций М.Т. Нужина, класс функций, определяющих профили Жуковского, и класс функций, характеризующихся неравенством $\mathrm{Re}\,\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \ge -A,\ A \ge 1,\ \zeta \in E$) с точки зрения единственной разрешимости внешней обратной краевой задачи. Вычислены значения радиусов единственности и радиусов выпуклости для этих классов функций.
Ключевые слова: радиус единственности, радиус Гахова, внешняя обратная краевая задача, конформный радиус.

1.

При подготовке переиздания монографии (179 в списке литературы к [1]) М.Т. Нужин обратил внимание на причины появления неединственности решения внешней обратной краевой задачи (окз) в постановке Ф.Д. Гахова. В монографии ([1], с. 54) к примеру В.С. Рогожина были добавлены новые примеры неединственной разрешимости с анализом соответствующих уравнений Ф.Д. Гахова. В дополнение к этому анализу в данной статье будут получены значения радиусов единственности и радиусов выпуклости для примеров М.Т. Нужина.

Внешняя окз по параметру s ([1], [2]) состоит в односвязном случае в отыскании области $D_z \subset \bar{\mathbf{C}}$ с границей L_z и регулярной в D_z функции $w(z)$ по известным граничным значениям

$$w(z)\Big|_{L_z} = u(s) + iv(s),\ 0 \le s \le l,$$

искомой функции, где $s -$ дуговая абсцисса кривой $L_z,\ l -$ её длина.

В постановке Ф.Д. Гахова, когда значение w в бесконечности не фиксируется, для определения полюса функции $z(w)$ служит уравнение Гахова.

В случае областей $rE,\ 0 < r \le 1$, вложенных в единичный круг $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, в уравнении Гахова для функции $f(r\zeta)$

$$r\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = \frac{2\bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^2}, \tag{1}$$

где функция $f(\zeta)$ определяет решение сопутствующей внутренней обратной задачи при тех же краевых условиях, найдем такое $r_E \le 1$, чтобы при всех $0 < r < r_E$ уравнение Гахова имело единственный корень $\zeta = 0$. Для каждой функции f найдется соответствующее значение $r_E[f]$, которое назовем радиусом единственности (или радиусом Гахова) для функции f.

Радиус выпуклости r_B определен Г.М. Голузиным ([3], с. 165) как радиус наибольшего круга rE, $0 < r \leq 1$, переходящего под действием любой однолистной в E функции в выпуклую область. Можно показать, что всегда $r_B \leq r_B[f] \leq r_E[f]$, где $r_B[f]$ – радиус выпуклости для конкретной функции f.

2.

М.Т. Нужин предложил класс функций с производной

$$f'_n(r\zeta) = e^{ar^n\zeta^n},\ a > 1,\ n > 2, \tag{2}$$

как обобщение примеров В.С. Рогожина (при $n = 2$). Для этого класса справедлива

Теорема 1. *В классе функций (2) внешняя обратная краевая задача разрешима в форме*

$$\Phi(\zeta) = \int_1^\zeta f'_n(r\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

единственным образом в круге радиуса

$$r_E[f_n] = \min\left(1,\ \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2n}}\right),\ a > 1,$$

$$r_E = \min_{n>2} r_E[f_n] = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a > 1,$$

причем радиус выпуклости для этого класса функций равен

$$r_B = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{3a}},\ 1 < a \leq \frac{9}{8}, \\ \frac{1}{\sqrt{2a}},\ a \geq \frac{9}{8}. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Из (2) следует

$$(\ln f'_n(r\zeta))' = nar^n\zeta^{n-1}.$$

Необходимое и достаточное условие выпуклости имеет вид

$$\mathrm{Re}\{nar^ne^{in\theta}\} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow nar^n\cos n\theta + 1 \geq 0.$$

Функция $\varphi(\zeta) = nar^n\zeta^n$ переводит единичный круг E в n-листный круг с центром в точке 0 радиуса nar^n. Этот круг расположен правее прямой $\mathrm{Re}\,\zeta = -nar^n$, так как

$$nar^n\cos n\theta + 1 \geq -nar^n + 1 \geq 0.$$

Отсюда

$$r \leq \frac{1}{\sqrt[n]{an}} = r_B[f_n].$$

После несложного исследования функции $\psi(x) = \ln\sqrt[x]{ax}$ при $x > 2$ можно получить r_B в форме (3).

Уравнение Гахова

$$nar^n\zeta^{n-1} = \frac{2\bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^2}, \tag{4}$$

очевидно, имеет нулевое решение. Найдем такие значения r, при которых других решений уравнения Гахова не будет.

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Уравнение (4) при $\zeta = \rho e^{i\alpha}$ после сокращения на $\rho \neq 0$ примет вид

$$ar^2(1-\rho^2) = e^{-2i\alpha}.$$

Переписав его в виде системы двух вещественных равенств

$$ar^2(1-\rho^2) = \cos 2\alpha, \quad 0 = \sin 2\alpha,$$

придем к отсутствию решений с $\rho > 0$ при $r \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$. Таким образом, $r_E[f_2] = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Уравнение Гахова (4) в случае $n > 2$ при $\zeta = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho \neq 0$, приводится к соотношению

$$\rho^{n-2} e^{i\alpha} n(1-\rho^2) = \frac{2}{nar^n}.$$

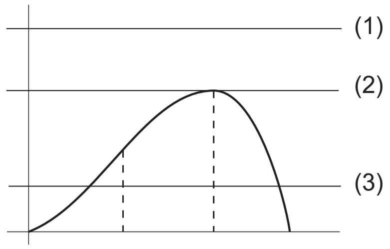

Рис. 1.

Переходя к равносильной системе вещественных равенств

$$(\rho^{n-2} - \rho^n)\cos \alpha n = \frac{2}{anr^n}, \quad (\rho^{n-2} - \rho^n)\sin \alpha n = 0,$$

из второго уравнения системы имеем $\alpha n = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Случай $\alpha n = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$, при котором первое уравнение системы имеет вид

$$\rho^{n-2} - \rho^n = -\frac{2}{anr^n},$$

не дает решения (слева и справа стоят величины разного знака).

Рассмотрим первое уравнение системы при $\alpha n = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}:$

$$\rho^{n-2} - \rho^n = \frac{2}{anr^n}.$$

Решим его графически. Для этого введем функцию $x(\rho) = \rho^{n-2} - \rho^n$. Производная $x'(\rho) = \rho^{n-3}(n-2-n\rho^2)$ обращается в нуль при $\rho = 0$ (если $n > 3$) и $\rho_{max} = \sqrt{\frac{n-2}{n}}$. При переходе через ρ_{max} функция $x'(\rho)$ меняет знак с $(+)$ на $(-)$, то есть в точке ρ_{max} функция $x(\rho)$ достигает своего максимума $x\left(\sqrt{\frac{n-2}{n}}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n} < 1, \quad n > 2$.

Вторая производная

$$x''(\rho) = \rho^{n-4}((n-3)(n-2) - n(n-1)\rho^2)$$

равна нулю при $\rho = 0$ (если $n > 4$) и $\rho_0 = \sqrt{\frac{(n-3)(n-2)}{(n-1)n}} < \rho_{max}$.

На интервале $(0, \rho_0)$ функция $x''(\rho)$ положительна, на интервале $(\rho_0, 1)$ отрицательна, поэтому график $x(\rho)$ представляет собой кривую, изображенную на рис. 1.

Графики функций $y = x(\rho)$ и $y = \frac{2}{anr^n}$ не пересекаются, если $x(\rho_{max}) < \frac{2}{anr^n}$, то есть

$$\left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{2}{n} < \frac{2}{anr^n} \Rightarrow r^n < \frac{1}{a}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Rightarrow r < \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2n}} = r_E[f_n].$$

При $r < r_E[f_n]$ уравнение Гахова имеет единственный корень $\zeta = 0$, и поверхность конформного радиуса, заданная выражением

$$R(f_n(rE), f_n(r\zeta)) = |f_n'(r\zeta)|(1 - |\zeta|^2),$$

имеет единственный максимум в нуле.

В случае, когда

$$x(\rho_{max}) = \frac{2}{anr^n} \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2n}},$$

уравнение Гахова помимо 0 имеет решения $\zeta_{1k} = \sqrt{\frac{n-2}{n}}\, e^{2\pi k i/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $n > 2$.

Для выяснения характера поверхности конформного радиуса над этими точками применим утверждение из [4].

Теорема А *(лемма 2 из [4]). Критическая точка* $(\zeta_0,\ R_0)$ *поверхности* $R(\zeta) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2)$, $R_0 = R(\zeta_0)$, *является 1) локальным максимумом, 2) седловой, 3) параболической, 4) омбилической (частный случай локального максимума) точками этой поверхности тогда и только тогда, когда для производной Шварца*

$$S(\zeta) = \left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right)^2$$

выполняются следующие условия:

$$1)|S(\zeta_0)| < \frac{2}{(1-|\zeta_0|^2)^2},\ 2)|S(\zeta_0)| > \frac{2}{(1-|\zeta_0|^2)^2},\ 3)|S(\zeta_0)| = \frac{2}{(1-|\zeta_0|^2)^2},\ 4)S(\zeta_0) = 0.$$

Для функции $f_n(r\zeta)$ с производной (2) получим

$$\frac{f_n''(r\zeta)}{f_n'(r\zeta)} = anr^n\zeta^{n-1} \quad \text{и} \quad S(\zeta) = nar^n\zeta^{n-2}\left(n - 1 - \frac{1}{2}nar^n\zeta^n\right).$$

Так как $S(0) = 0$, то $R(0) = 1$ будет локальным максимумом (омбилической точкой поверхности).

Докажем, что $|S(\zeta_{1k})| = \frac{n^2}{2}$. Действительно, $r^n\zeta_{1k}^n = \frac{1}{a}\frac{n-2}{n}$, поэтому

$$S(\zeta_{1k}) = \frac{n-2}{\zeta_{1k}^2}(n - 1 - (n-2)/2) = \frac{n^2}{2}e^{-i\frac{4\pi k}{n}}.$$

Поскольку

$$\frac{2}{(1-|\zeta_{1k}|^2)^2} = \frac{2}{(1-(1-2/n))^2} = \frac{n^2}{2},$$

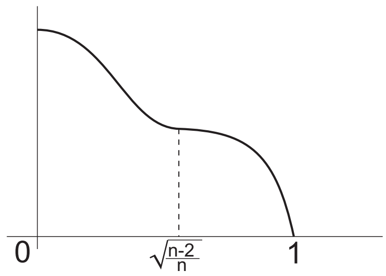

Рис. 2.

то в силу теоремы 2 все точки $\zeta_{1k},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,$ являются полуседловыми, причем

$$R(\zeta_{1k}) = e^{\frac{n-2}{n}}\frac{2}{n} < 1,\ n > 2, \quad \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n-2}{n}}\frac{2}{n} = 0.$$

Срезка по направлению $\frac{2\pi k}{n}$ схематично изображена на рис. 2.

Таким образом, радиус Гахова для функции f из рассматриваемого класса Нужина равен

$$r_E[f_n] = \min\left(1,\ \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2n}}\right),$$

если $a > (\frac{n}{n-2})^{\frac{n-2}{2}}$, причем

$$0 < r_B[f_n] = \frac{1}{\sqrt[n]{an}} < r_E[f_n].$$

Для получения значения радиуса единственности по всему классу функций Нужина нужно исследовать функцию $\mu(x) = \ln \frac{1}{\sqrt[x]{a}}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{2x}}$. Опуская подробности, запишем результат этого исследования

$$r_E = \min_{n>2} r_E[f_n] = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

□

Замечание. Неединственность решения уравнения Гахова определится пересечением $x(\rho) = \rho^{n-2} - \rho^n$ и $x(\rho) = \frac{2}{anr^n}$ в двух точках, которые возникнут при увеличении r за $r_E[f_n]$. Обоснуем, что одна из них $\rho_1 > \rho_{max}$ приведет к максимуму, а вторая с $\rho_2 < \rho_{max}$ определит седло. Для этого подставим

$$r^n = \frac{2}{na(\rho^{n-2} - \rho^n)} = \frac{2}{na\rho^{n-2}(1-\rho^2)}$$

в выражение для шварциана. Получим

$$|S(\rho e^{i\frac{2\pi k}{n}})| = na\rho^{n-2}\frac{2}{na\rho^{n-2}(1-\rho^2)}\left|n - 1 - \frac{na}{2}\rho^n \frac{2}{na\rho^{n-2}(1-\rho^2)}\right| =$$

$$= \frac{2}{1-\rho^2}\left|n-1-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\right| = \frac{2}{(1-\rho^2)^2}|n-1-n\rho^2|.$$

Отсюда видно, что при $n - 1 - n\rho^2 = 1$, то есть при $\rho = \sqrt{\frac{n-2}{n}} = \rho_{max}$ получим

$$|S(\rho e^{i\frac{2\pi k}{n}})| = 2/(1-\rho^2)^2$$

– это уже отмеченный случай полуседла. При $\rho_1 > \rho_{max}$ приходим к неравенству

$$|S(\rho e^{i\frac{2\pi k}{n}})| < 2/(1-\rho^2)^2$$

– случай максимальной точки поверхности конформного радиуса, а при $\rho_2 < \rho_{max}$ получим

$$|S(\rho e^{i\frac{2\pi k}{n}})| > 2/(1-\rho^2)^2$$

– случай седловой точки.

3.

Интересные эффекты по радиусам Гахова получаются для класса профилей Жуковского.

Согласно [5] функция, осуществляющая отображение единичной окружности на дугу Жуковского, имеет вид

$$z = \frac{1}{2}\left(\omega + ih + \frac{a^2}{\omega + i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{\zeta} + ih + \frac{a^2\zeta}{\sqrt{a^2+h^2}+ih\zeta}\right) = F(\zeta).$$

Возьмем $h = ca$, тогда

$$z = F(\zeta) = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{1+c^2}}{\zeta} + ic + \frac{\zeta}{\sqrt{1+c^2}+ic\zeta}\right),$$

поэтому

$$f'(\zeta) = \zeta^2 F'(\zeta) = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{1+c^2}\zeta^2 - 2ic\zeta - \sqrt{1+c^2}}{\left(1 + i\zeta\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2}.$$

Поскольку

$$\frac{f''}{f'} = (\ln f')' = (\ln(\sqrt{1+c^2}\zeta^2 - 2ic\zeta - \sqrt{1+c^2}) - 2\ln(ic\zeta + \sqrt{1+c^2}))' =$$

$$= \frac{2\zeta}{(\sqrt{1+c^2}\zeta^2 - 2ic\zeta - \sqrt{1+c^2})(ic\zeta + \sqrt{1+c^2})},$$

то уравнение Гахова имеет вид

$$\frac{2\zeta}{(\sqrt{1+c^2}\zeta^2 - 2ic\zeta - \sqrt{1+c^2})(ic\zeta + \sqrt{1+c^2})} = \frac{\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2}, \tag{5}$$

из которого видно, что $\zeta = 0$ является его корнем. Пусть теперь $\zeta = \rho e^{i\alpha}$ и $\rho \neq 0$. Тогда, поделив обе части уравнения на $\rho \neq 0$, отделим мнимую и вещественную части и придем к равносильной системе равенств

$$\begin{cases} \cos\alpha(-\rho^2(2+3c^2) + 2 + c^2) = -2\rho^3 c\sqrt{1+c^2}\sin\alpha\cos\alpha, \\ \sin\alpha(-\rho^2(2+3c^2) - c^2) = \rho^3 c\sqrt{1+c^2}(2\cos^2\alpha - 1) - 3\rho c\sqrt{1+c^2}. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы удовлетворится в одном из трех случаев:

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = 1, \\ \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = -1, \\ \cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha = \frac{\rho^2(2+3c^2)-2-c^2}{2\rho^3 c\sqrt{1+c^2}}, \end{array}\right.$$

причем содержательным для внешней окз окажется лишь первый, поскольку последние два не дадут корней $\rho = |\zeta| \in (0,1)$.

Итак, $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$, поэтому второе уравнение системы запишется в виде:

$$\rho^3 c\sqrt{1+c^2} - \rho^2(2+3c^2) + 3\rho c\sqrt{1+c^2} - c^2 = 0.$$

Это уравнение имеет три корня

$$\left[\begin{array}{l} \rho_1 = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} < 1, \\ \rho_2 = \frac{\sqrt{1+c^2}-1}{c} < 1, \\ \rho_3 = \frac{\sqrt{1+c^2}+1}{c} \notin (0,1). \end{array}\right.$$

Следовательно, внешняя окз разрешима в трёх случаях при $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \frac{ic}{\sqrt{1+c^2}}$, $\zeta_3 = i\frac{\sqrt{1+c^2}-1}{c}$. При этом

$$|\{f,\zeta\}|_{\zeta_1} = \frac{1}{1+c^2} < 2,$$

значит, в $\zeta_1 = 0$ поверхность конформного радиуса имеет локальный максимум $R(0) = \frac{a}{2}\sqrt{1+c^2}$.

Далее

$$|\{f,\zeta\}|_{\zeta_2} = 2c^2(1+c^2) < 2(1+c^2)^2,$$

то есть в $\zeta_2 = \frac{ic}{\sqrt{1+c^2}}$ поверхность конформного радиуса также обладает локальным максимумом $R(ic/\sqrt{1+c^2}) = R(0) = \frac{a}{2}\sqrt{1+c^2}$.

Третий корень уравнения (5) характеризует на поверхности конформного радиуса седловую точку. Действительно,

$$|\{f,\zeta\}|\Big|_{\zeta_3} = \frac{c^2}{2}\frac{3c^2+4-4\sqrt{1+c^2}}{(\sqrt{1+c^2}-1)^2},$$

$$\frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}\Big|_{\zeta_3} = \frac{c^4}{2(\sqrt{1+c^2}-1)^2},$$

и разность вычисленных величин после сокращения на общий неотрицательный множитель примет вид

$$2c^2+4-4\sqrt{1+c^2} = 2(1+c^2) - 2\cdot 2\sqrt{1+c^2} + 2 = 2(\sqrt{1+c^2}-1)^2 > 0,$$

то есть

$$|\{f,\zeta\}|\Big|_{\zeta_3} > \frac{2}{(1-|\zeta|^2)^2}\Big|_{\zeta_3}.$$

Значит, поверхность конформного радиуса имеет седло в $\zeta_3 = i\frac{\sqrt{1+c^2}-1}{c}$ и $R((i\sqrt{1+c^2}-1)/c) = 2a(1+c^2)(\sqrt{1+c^2}-1)^2/c^4$.

Срезка поверхности конформного радиуса при $\zeta = i\eta$ изображена на рис.3.

Полученные решения уравнения Гахова (5) определяют следующие решения внешней задачи. Первый корень $\zeta_1 = 0$ будет, очевидно, связан с дугой Жуковского:

$$F_1(\zeta) = \frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{1+c^2}+ic\zeta}{\zeta} + \frac{\zeta}{\sqrt{1+c^2}+ic\zeta}\right) = \frac{a}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right).$$

Корень ζ_2 решения, существенно отличного от уже полученного, не даст. Действительно, функция

$$F(\zeta) = \frac{a\sqrt{1+c^2}}{2}\left(\zeta + \frac{1}{1+c^2}\frac{1}{\zeta - \frac{ci}{\sqrt{1+c^2}}}\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\sqrt{1+c^2}\zeta - ci + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}\zeta - ci} + \frac{aci}{2}\right),$$

вновь определит в плоскости z дугу Жуковского. О третьем корне заметим лишь то, что он будет определять неоднолистное решение внешней окз.

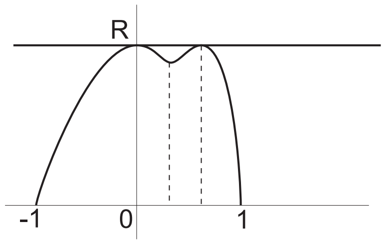

Рис. 3.

Вычислим теперь радиус единственности. Прежде всего заметим, что при $h = ca = 0$ дуга Жуковского представляет собой прямолинейный разрез и уравнение Гахова имеет единственное решение $(r_E[f] = 1)$.

Далее перейдем в уравнении Гахова (5) к r-линиям уровня. Повторяя все действия, проведенные для него при $r = 1$, перейдем к аналогичной системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos\alpha(r^2(1-\rho^2) - r^2\rho^2(1+3c^2) + 1 + c^2) = -2r^3\rho^3 c\sqrt{1+c^2}\sin\alpha\cos\alpha, \\ \sin\alpha(r^2(1-\rho^2) - r^2\rho^2(1+3c^2) - 1 - c^2)r^3 = \rho^3 c\sqrt{1+c^2}(2\cos^2\alpha - 1) - 3r\rho c\sqrt{1+c^2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$. Тогда второе уравнение системы примет вид

$$r^3\rho^3 c\sqrt{1+c^2} - r^2\rho^2(2+3c^2) + 3r\rho c\sqrt{1+c^2} - 1 - c^2 + r^2 = 0.$$

Рассмотрим его как условие существования общих точек кривых $y_1(r,\rho) = c\sqrt{1+c^2}r\rho(r^2\rho^2+3)$ и $y_2(r,\rho) = r^2\rho^2(2+3c^2) + 1 + c^2 - r^2$. Среди всех таких точек найдем ту, в которой касательные векторы обеих кривых совпадают, то есть $(y_1)'_\rho = (y_2)'_\rho$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} r^3\rho^3 c\sqrt{1+c^2} - r^2\rho^2(2+3c^2) + 3r\rho c\sqrt{1+c^2} - 1 - c^2 + r^2 = 0, \\ 3c\sqrt{1+c^2}r^3\rho^2 - 2r^2\rho(2+3c^2) + 3c\sqrt{1+c^2}r = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения будем иметь $\rho = \frac{2+3c^2-\sqrt{4+3c^2}}{3cr\sqrt{1+c^2}}$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим

$$r = r_E[f] = \sqrt{\frac{27c^4 + 45c^2 + 16 - 2\sqrt{4+3c^2}(4+3c^2)}{27c^2(c^2+1)}} \leq 1. \qquad (6)$$

При $c \to \infty$ и после применения правила Лопиталя при $c \to 0$ легко видеть, что величина $r_E[f] = 1$, а при $c = 1$, то есть $h = a$, $r_E \approx 0,97 < 1$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Если одним из решений внешней обратной краевой задачи является дуга Жуковского с отображающей функцией*

$$F(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{\zeta} + ih + \frac{a^2\zeta}{\sqrt{a^2+h^2} + ih\zeta}\right), \ |\zeta| < 1, \ h = ca, \ 0 < c + \infty,$$

то будет существовать и второе решение. При этом радиус единственности опишется выражением (6). *В случае вырождения дуги при* $c = 0$ *в прямолинейный отрезок решение будет единственным* ($r_E[f] = 1,\ f'(\zeta) = \zeta^2 F'(\zeta)$).

4.

Величины радиусов Гахова можно получить для подклассов аналитических функций, выделяемых неравенствами с простым геометрическим смыслом. Так для подклассов с условием подчиненности

$$\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \prec \frac{2A\zeta}{1-\zeta},\ |\zeta| < 1,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \geq -A,\ A \geq 1, \tag{7}$$

получим следующий результат.

Теорема 3. *В классе функций, характеризующихся неравенством* (7), *внешняя обратная краевая задача разрешима единственным образом в круге радиуса* $r_E = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

Доказательство. Из геометрических соображений очевидно, что $\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}$ подчинена функции $\Phi_0(\zeta) = \frac{2A\zeta}{1-\zeta}$, осуществляющей отображение единичного круга E на полуплоскость $\{\operatorname{Re}\Phi_0 > -A\}$. Тогда $\Phi_0^{-1}\left(\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right) = \varphi(\zeta)$ – функция из леммы Шварца, то есть $|\varphi(\zeta)| < 1$ и $\varphi(\zeta) = a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots$. Следовательно, $|\varphi(\zeta)| \leq |\zeta|^2,\ |\varphi(r\zeta)| \leq r^2|\zeta|^2$.

Так как $\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \Phi_0(\varphi(\zeta))$, то

$$\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2A\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)}. \tag{8}$$

Переходя к r-линиям уровня, перепишем (8) в виде

$$r\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = \frac{2A\varphi(\zeta)}{\zeta(1-\varphi(\zeta))}.$$

Найдем, при каких r выполнится неравенство

$$r\left|\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)}\right| \leq \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}.$$

Для этого проследим цепочку неравенств

$$r\left|\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)}\right| = \frac{2A|\varphi(r\zeta)|}{|\zeta(1-\varphi(r\zeta))|} \leq \frac{2Ar^2|\zeta|}{1-r^2|\zeta|^2} \leq \frac{2Ar^2|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \leq \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}.$$

Последнее неравенство выполнится при $Ar^2 \leq 1$, то есть при $r \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$. □

Уравнение (8) при $\varphi(\zeta) = \zeta^2$ в виде

$$\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2A\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

определяет такую функцию:

$$\ln f' = \ln[c(1-\zeta^2)^{-A}] \Rightarrow f(\zeta) = c\int (1-\zeta^2)^{-A} d\zeta + c_1$$

с особенностями в точках ± 1 логарифмического характера при $A = 1$ и особенностями степенного характера при $A > 1$.

В случае функции $f(r\zeta)$ уравнение Гахова запишется в виде

$$r\frac{f''(r\zeta)}{f'(r\zeta)} = r\frac{2Ar\zeta}{1-r^2|\zeta|^2} = \frac{2\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \;\Rightarrow\; \frac{Ar^2\rho e^{i\alpha}}{1-r^2\rho^2 e^{2i\alpha}} = \frac{\rho e^{-i\alpha}}{1-\rho^2} \;\Rightarrow$$

$$\frac{Ar^2 e^{2i\alpha}}{1-r^2\rho^2 e^{2i\alpha}} = \frac{1}{1-\rho^2} \;\Rightarrow\; Ar^2 e^{2i\alpha}(1-\rho^2) = 1 - r^2\rho^2 e^{2i\alpha} \;\Rightarrow$$

$$\rho^2 e^{2i\alpha} r^2 (A-1) = Ar^2 e^{2i\alpha} - 1. \tag{9}$$

При $\alpha = \pi k$, то есть $e^{2i\alpha} = 1$ получим $\rho_A^2 = \frac{Ar^2-1}{r^2(A-1)} = \frac{A-1/r^2}{A-1}$, причем положительность правой части получится, когда $1/r^2 \in (1, A)$. Значит, уравнение Гахова будет иметь три корня: 0, $\pm\rho_A = \pm\sqrt{\frac{A-1/r^2}{A-1}}$. Если же $1/r^2 \in (A, \infty)$, то уравнение Гахова будет иметь только одно нулевое решение. Самым большим из таких r будет значение $r_E(A) = 1/\sqrt{A}$.

При $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (то есть $e^{2i\alpha} = -1$) получим $\rho^2 r^2(A-1) = Ar^2 + 1$ и $\rho^2 = \frac{A+1/r^2}{A-1} > 1$.

При других α ($\neq \frac{\pi}{2}m + \pi k$) не будет равенства мнимых частей уравнения (9) : $(\rho^2 r^2(A-1) - Ar^2)\sin 2\alpha \neq 0$, к тому же ρ^2 не может быть равным $A/(A-1) > 1$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Функция* $f_A(r\zeta) = \int\limits_0^{r\zeta}(1-t^2)^{-A}dt$ *является экстремальной в оценке радиуса единственности (радиуса Гахова)* $r_E = 1/\sqrt{A}$ *при* $A \geq 1$ *для класса функций с условием* (7) *и* $f''(0) = 0$.

Замечание. Радиус выпуклости для этого класса функций определится из уравнения $-2Ar^2/(1+r^2) = -1$, $r^2(2A-1) = 1$, $r_B(A) = 1/\sqrt{2A-1}$.

Summary

L.A. Aksentyev, A.N. Akhmetova. About Gakhov's radius for some known functions classes. Authors studied inverse boundary value problem for some known classes of function (class of the Nugin's functions, class of the functions defining the Gukovsky's airfoils, class of the functions satisfying to the inequality $\mathrm{Re}\,\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \geq -A$, $A \geq 1$, $\zeta \in E$,) and enter new concept of the uniqueness radius. This is the radius of the greatest circle rE, $0 < r \leq 1$, $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, in that inverse boundary value problem has only one decision. The values of uniqueness radiuses and convexity radiuses for some known classes of functions are received.
Key words: uniqueness radius, convexity radius, conformal radius, inverse boundary value problem.

Литература

1. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. – Изд-во Казан. ун-та, 1965 (2-е изд.). – 334 с.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1977 (2-е изд.). – 640 с.
3. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного пременного. – М.: Наука, 1977 (3-е изд.). – 640 с.
4. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987 (5-е изд.). – 688 с.

Аксентьев Леонид Александрович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

E-mail: *Leonid.Aksentev@kpfu.ru*

Ахметова Альбина Наилевна – канд. физ.-мат. наук, доцент, Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева.

E-mail: *Achmetowa@inbox.ru*